


2/ Tenseurs

①

2.1/ Définition

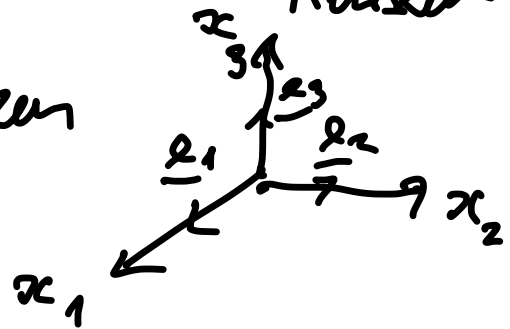
Ex: $T \underline{a} = 3 \underline{a}$

$$T \underline{a} = \underline{n}$$

$\underline{n}$ fixé

pas un
tenseur

2.2/ Composantes d'un tenseur
système d'axes cartésien



②

Soit T un tenseur et soit

$$T \underline{e}_1 = \text{vecteur arbitraire} = \underline{T}_{11} \underline{e}_1 + \underline{T}_{21} \underline{e}_2$$

$$T \underline{e}_2 = T_{12} \underline{e}_1 + T_{22} \underline{e}_2 + \underline{T}_{32} \underline{e}_3 = \text{vecteur arbitraire}$$

$$T \underline{e}_3 = T_{13} \underline{e}_1 + T_{23} \underline{e}_2 + T_{33} \underline{e}_3$$

Avec la convention de sommation:

$$T \underline{e}_i = T_{ji} \underline{e}_j$$

De plus, on remarque que $T_{11} = \underline{e}_1 \cdot T \underline{e}_1$

③

En général, $T_{ij} = \underline{e}_i \cdot T \underline{e}_j$

$\equiv$ Composantes du tenseur $\underline{T}$

[car $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$]

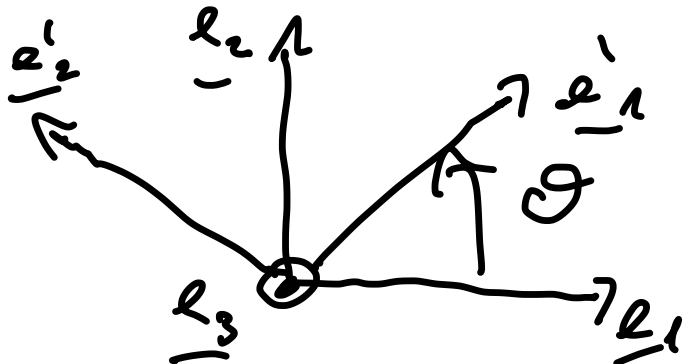
Ds notre base, les composantes de T peuvent être placées dans une matrice

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

les composantes de $T \underline{e}_1$ (rouge)

comp de $T \underline{e}_2$ (vert)

Exemple : tensor rotation



R : rotation de θ
autour de $\underline{e}_3$

Matrice de R ?

$$\underline{e}'_1 = R \underline{e}_1 = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{e}'_2 = R \underline{e}_2 = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{e}'_3 = R \underline{e}_3 = \underline{e}_3$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3) Pts de révision

⑤

- Composantes d'un vecteur transformé

$$b_k = T_{ki} a_i$$

- Somme de tenseurs
- Produit de deux tenseurs



$$ST \neq TS$$

- Transposé d'un tenseur
 $(TS)^T = S^T T^T$

$$T^T_{ij} = T_{ji}$$
$$T^T$$

- produit tensoriel de 2 vecteurs

⑥

Def: $\underline{a} \otimes \underline{b}$ est un tenseur W
tel que

$$W_{ij} = a_i b_j$$

En notation matricielle

$$[W] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_1: \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = T_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + T_{12} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \dots + T_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \rightarrow T = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

- Trace d'un tenseur

$$A_n T = T_{ii}$$

- Identité

$I \equiv$ tenseur identité tel que

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I a = \underline{a} \\ \forall \underline{a}$$

- Tenseur inverse $T^{-1} T = T T^{-1} = I$

(8)

(9)

- Tenseur orthogonal

→ préserve les longueurs et les angles

(ex : rotation, symétrie)
réflexion

$$Q^T Q = Q Q^T = I$$

$$\rightarrow Q^{-1} = Q^T$$

• Règles de transformation

(10)

$$\left\{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \right\} \xrightarrow{Q^T} \left\{ \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3 \right\}$$

transformation
orthogonale

$$\text{On écrit } \underline{e}'_i = Q^T \underline{e}_i = Q_{mi} \underline{e}_m$$

Transformation pour les composantes d'un tenseur

$$T_{ij} = \underline{e}_i \cdot T \underline{e}_j$$

$$T'_{ij} = \underline{e}'_i \cdot T \underline{e}'_j$$

avec $\underline{e}'_i = Q_{mi} \underline{e}_m$

(11)

D'où $T'_{ij} = Q_{mi} \underline{e}_m \cdot T Q_{nj} \underline{e}_n$
 $= Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$

En matriciel $[T]' = [Q]^T [T] [Q]$

Table de transformation de base $\{\underline{e}_i\} \rightarrow \{\underline{e}'_i\}$

$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha' = \alpha & \text{tenseur d'ordre 0 (scalare)} \\ \alpha'_i = Q_{mi} \alpha_m & \text{tenseur d'ordre 1 (vecteur)} \end{array} \right. \rightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} T'_{ij} = Q_{mi} Q_{mj} T_{mn} \quad \text{tenseur d'ordre 2} \\ T'_{ijk} = Q_{mi} Q_{mj} Q_{nk} T_{mn} \quad \text{tenseur d'ordre 3} \end{array} \right. \quad (12)$$

On verra plus tard en tension d'ordre 4 important

$C_{ijkl} \equiv$ tensor d'elasticité

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$